滑らかな補間関数の検討

——デジタル処理による曲線の描画——

梶　谷　哲　也*

Using and Interpolating Spline Function in Graphical Design

Tetsuya Kajitani

要　旨　われわれは，いろいろな分野において，しばしば次のような問題に直面する。“与えられた複数の点を通るなめらかな曲線を求めよ”。

この問題を解決する方法としては，自在定規か雲型定規などを用いて複数の点が与えられた紙のうえで，曲線を求める方法が一般的である。そこで，コンピュータを利用したさまざまな支援装置でも，コンピュータのデジタル処理を利用して，上記曲線と同等の曲線を求めることが必要となる。本稿では，複数の点を通る滑らかな補間曲線を求める数学的方法で，工学的に利用価値の高いものとして，パラメータ変数を利用したスプライン関数が挙げられることを示した。

また，曲線の描画のためのデジタル処理のうちで，スプライン関数のような区間多項式を利用した場合に，安定した高速描画を可能とする評価式を提案し，定量的な検討を試みた。この補間区間ごとに内挿点数を増減させる評価式を利用すると，複雑な（曲率の高い）形状は，より緻密（内挿点をより多く使用する）に，そうでない直線ような形状は最小の内挿点で描画する事が可能となる。この事は補間曲線関数が表現している形状を出来る限り忠実に描画しながら，その一方で，補間曲線全体の描画時間を短縮出来ることを意味している。

1.　は　じ　め　に

前回の紀要[1)]で目標とした，簡易なデザイン支援システムを構築するためには，2次元（最終的には3次元）の図形を実用性を失わない範囲で，工学的に表現しなくてはならない。

コンピュータ(デジタル処理)で図形を表現，処理するために以下の理論（技術）の研究が必要となる。

第1に曲線の数学的記述に関する理論で，その中でも滑らかな補間関数の工学的利用に関するの研究，第2に曲線等で構成される図形同士の関係記述方式の研究で，特にグラフ理論を中心とした位相幾何学の研究，第3に3次元ディスプレイ[2)]に代表される図形の表示技術の研究で，新たな表示方式の研究とそれを具現化させるための機器の研究開発がある。

本紀要では，以上のうち，曲線の工学的表現方法の習得を目的として，パラメータ型スプライン補間関数の検討を行うために，実際に補間関数のプログラムを作成して定量的な検討を試みた。

次に，曲線の描画のためのデジタル処理のうちで，スプライン関数のような区間多項式を利用した場合に，安定した高速描画を可能とする評価式を提案し，定量的に検討した。

2.　図形のデジタル表現

図形をデジタル情報として表現する方式には大きく2通りある。

第1の方法は，図形を人間の目には連続と感じる程度の離散点の連続として分解して，その

* 本学講師　人工知能

座標をすべて計算機で記憶する方法。この方法の特徴は，計算機の多量のメモリーを必要とするかわりに，自由な図形の表現が基本的に可能となる事が挙げられる。

第２の方法は，図形（例えば直線）の両端座標等の最小の情報のみを計算機に記憶し，その他の両端点を結ぶ中間点の座標情報については，両端点の数学的関係から，計算により求める方法である。この方法の特徴として，曲線の最小値の補間点（例えば，両端点）とその補間点間の数学的関係の記述により，計算機の小量のメモリーにより図形の表現が可能となる。但し，この方式の欠点として数学的関係記述の限界から，描画可能な範囲が限定されるがあることが挙げられる。

現実には，計算機に曲線の座標情報を座標入力装置などを用いて入力する場合，メモリ容量の制限から，多くの座標データを入力する事ができない。このことは計算機を利用するコンピュータグラフィックス技術に共通した問題となっている。その打開策として，物体（曲線）を計算機で表現するさいに，物体を表現する各々順序ずけられた離散的な入力データ点(座標点)を曲線で結んで表現するワーヤーフレーム法などを利用する事が一般的である。このとき物体に関するデータ点が多ければ，データ点どうしを直線で結んでも元の物体を十分再現できるが，データ点が少ない場合には，滑らかな補間関数等で生成される曲線を用いて，あたかも多くの点のデータを利用したのと同等に扱うことが必要となる。

3.　物体の形状と数学的表現

図１の様な実験データの示す曲線は，それを一義的に表現し算術的処理を可能とする理論的数式表現が研究されている。

また，グラフィックスのような分野でも，さまざまな形状の数学的表現の研究が進められている。例えば，図２などは，アルキメデスの螺旋として知られていて，一見すると貝殻の断面ようにみえる。

ところが，２次元空間上に存在するさまざまな

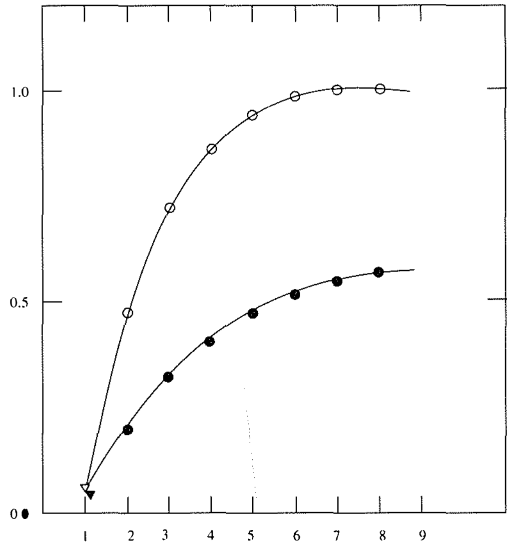


図１　一般的実験データ

形状の線分（点を含む）をアルキメデスの螺旋のように，その形状がもつ特徴ごとに良く研究された関数表現を切り替えて適用していては，自由な図形表現を目的とした場合に，その自由度を極端に制限する事になる。そこで，同一の関数表示で，２次元図形全体を表現する（パラメータを図形に応じて調整する）手段が必要となる。このタイプの関数としてスプライン関数と呼ばれる与えられた複数の点をもとに滑らかな補間曲線の関数式を生成する研究がなされている。

ここで，補間曲線の生成過程は人間による場合のそれと類似している点が多くあるため，対比のために，図３にスプライン関数による補間曲線の生成過程と人間の手作業による補間作業過程を併記する。

まず，手作業によって滑らかな曲線を生成する場合は，自在定規か雲型定規を使用して，複数の点を与えられた紙の上で曲線をもとめる（鉛筆等で連続して描画する）ことが一般的である。生成過程はまず紙の上の複数の点の把握，次に自在定規による滑らかな曲線（補間曲線）の生成，最後にその補間曲線の描画である。

これに対し，計算機によるデジタル処理による

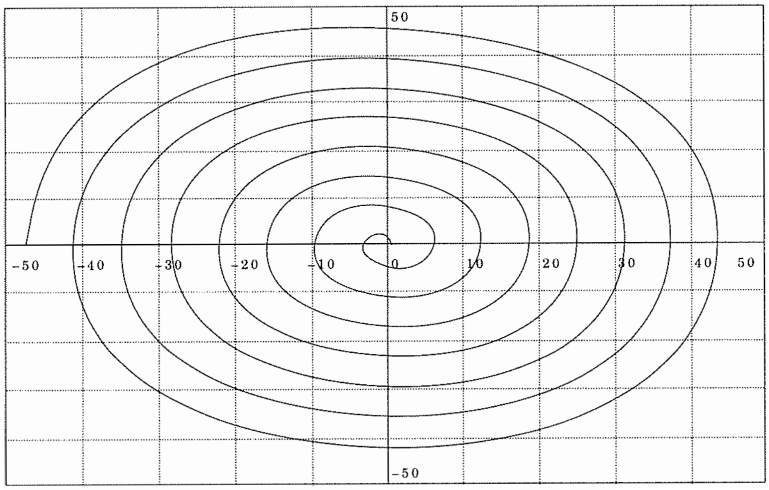


図２　アルキメデスの螺旋

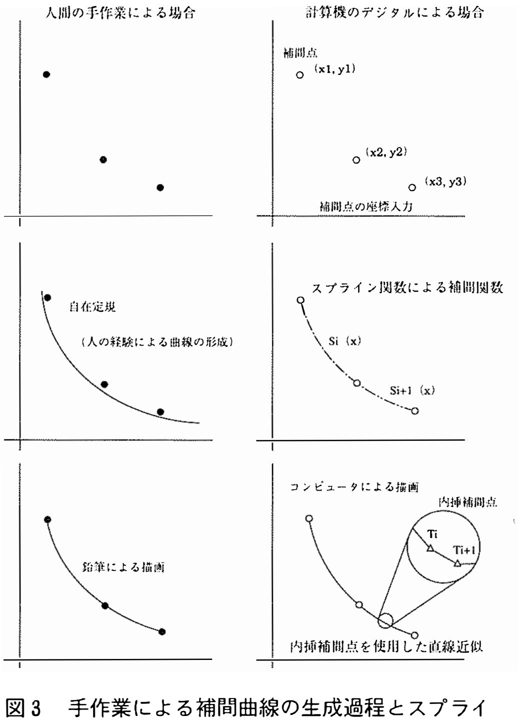


図３　手作業による補間曲線の生成過程とスプライン関数による補間曲線の生成過程

場合は，まず与えられた複数の点の全ての座標を求めて，次に，これらの点を通る滑らかな補間曲線関数を求める，最後に，生成した関数を適当な量の内挿補間点を使用して，実際の図形として表示（描画）する。

つまり，人間が自在定規を利用した過程をコンピュータ（各種支援装置）は，スプライン関数を生成することで代行している。また，図３でも明らかなように，デジタル処理による場合，与えられた点を通る滑らかな補間曲線の良否を決定する内容には，以下の２つの内容がある。

○　デジタル処理で生成する，複数の点を通る滑らかな補間関数が，いかに現実の（人間が生成する）図形に近い近似関数を安定して生成し得るか？　これは，人が自在定規等を利用して，いかにきれいな曲線を作れるかと同等である。

○　滑らかな補間関数として数学的に表現された，補間曲線をどのくらい忠実に，表示(描画)出来るか？

これは，自在定規等で作成した曲線を，いかにそのまま紙などに写し取るかと同等である。

ここで，第１点目の問題には，既存の補間多項式のなかから，デザイン活動支援するのに有効と考えられるパラメータ型スプライン補間関数を検討する。

（補足資料参照の事）

また，第２点目の曲線表現の忠実性については，内挿補間点の個数に関する評価式を提案し，その効果もふくめた定量的検討を加える。

2.　補間点と補間関数

２次元に存在している形状は，無限に近く，その特徴ごとに別々の特化した関数表現を確立することは不可能と考えられる。

そこで，２次元形状を代表する特徴点（または与えられた補間点）から，本来の２次元形状を一定の誤差の範囲で近似する種々の関数が考案されている。そのなかで，与えられた複数の点を通る滑らかな曲線を生成する関数に，補間多項式がある。

この補間多項式には，大きく２種類ある。第１は，与えられた補間点全て通る１つの関数を生成して曲線を表現する種類。第2は，与えられた一対の補間点間を１つの補間区間として，その区間ごとに１定の次数（通常３次元）の多項式として各々の補間区間ごとに表現して，全体として生成すべき曲線を表現していく種類がある。

前者のように，曲線全体を１つの関数で表現する場合，曲線近似多項式は一般に高次の多項式となりやすく，結果的に“ルンゲの現象”と呼ばれる現象が発生することが多いため実用的でない場合が多い。

一方，補間区間ごとにたかだか３次の多項式をそれぞれ適用する種類の補間関数は，上記の現象は発生する可能性はない。

もう一つの特徴として，複数の補間点のうち，特定の１点の変更が補間曲線全体の再計算のつながらない特徴をもっている。この補間曲線の部分変更が，補間曲線全体の変更につながらない点は重要である。

とくに，デザイン活動は全体のイメージづくりから始めて最終的には，部分修正（変更）の連続を繰り返して細部のデザインを決定していくことが一般的である。この過程で，曲線の一部分の変更が，全体の形状にまで影響を及ぼすような特徴を持つと円滑なデザイン活動が出来なくなる。また，曲線の変更にともなう再計算に必要なデジタル処理量（時間）でも，曲線全体の再計算を部分変更のたびに繰り返すと時間がかかりすぎ，デザインの修正作業の効率が著しく減少して実用性のないものとなるためである。

最後に，スプライン関数は数学的計算方法でｘ座標→ｙ座標の関数関係をもつが特定のｘ座標にたいして複数のｙ座標を持つことが出来ない補間関数であるため，本紀要ではこの問題の解決している，x, y の２変数の他に媒介変数ｔを導入した補間多項式（パラメータ型スプライン関数）として検討を行うものとした。

ここで，パラメータ型スプライン関数の有効性を検討するために，実際に，服装学部１年生４人に補間点を示し補間曲線を自在定規を使用

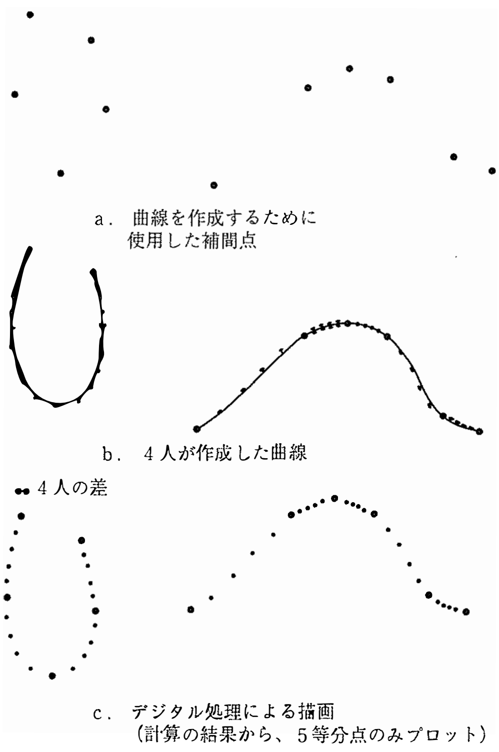


図４　手作業による代表的な図形の補間とパラメータ型スプライン関数

して作成してもらった結果と補間関数により求めた曲線との差異を定量的に測定した。

ここで，補間点を結ぶ曲線の定量的判定のために測定基準を以下のように規定した。

測定点１．　補間点の絶対座標点での誤差

測定点２．　補間点間直線距離を５等分した点からの垂直距離

以上の絶対量を測定し，集計した。

この測定の結果，４人の描画した図形の誤差の最大値は，補間点での誤差は０mm，５等分点での誤差は最大２mm であった。

以上の図形と同等の補間点情報を，パラメータ型スプライン関数に与えて補間関数を求めて，内挿点を一律４点として計算した内挿補間点が図４の(c)である。

計算の結果は，補間点での誤差は０mm，５等分点での誤差の最大値は１mm であった。

非常に限定された図形のみの比較でしかないが，人間の描画する図形と同程度の誤差で図形を表現出来る可能性があることが分かった。

ここで，非常に限定された範囲のなかで，人間の描画する平均的な補間曲線からの誤差は，複数の人間の描画した曲線どうしの誤差の範囲内に含まれると考えられる。

3.　内挿点と評価式

補間点から求められた補間関数は，その（X 座標，Y 座標）の関係を適当な量の具体的な点及び線分で表現する事によって，はじめて人間の目で認識できるものとなる。逆に，人間が認識している補間関数の形状表現は，与えられた内挿点直線近似としてしか認識できない。この極端な例が図５である。図中の補間関数自体の表現と，実際に人間に認識させるための直線近似用の内挿補間点と近似曲線では，曲線の頂点付近のカーブの形状が近似曲線の方が緩やかに感じられる。

この問題は，補間点と補間点との間の内挿点を無限大にして，２次元形状の関係を表現すれば，解決することが出来る。ただし，現実の

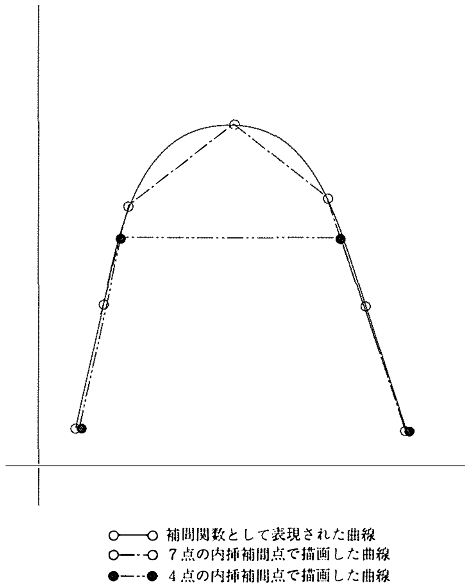


図５　内挿補間点と形状

I. O 機器（例えばプリンタ，XY プロッタ等）は，その構造上の制約から最小の制御単位長が存在するため，補間点間の内挿補間点を無限に求めても実用性はない。また，内挿補間点の数値演算を計算機でデジタル処理する場合，計算機の演算能力にも十分な余力があるわけではないため，現実に必要と考えられる以上の内挿補間点の計算をしてから曲線の直線近似をした場合，曲線の描画そのものに時間がかかりすぎて実用性がなくなる。

そこで，補間曲線の描画に必要となる内挿点の数を事前に与えられた補間点から導出して，安定して，しかも高速な描画を行う必要から，以下の様な評価式を提案し，定量的な評価をくわえた。

ここで，内挿補間点数の評価式を以下のように定めた。この評価式のねらいは，曲率の高い所での曲線の直線近似の表現には，内挿点の数を増加させ，逆に，直線の様な場合には，その数を最小にすることである。

$$N=(a*1[a_2]/ds*[\text{曲率}])+(b*(l[a_2]/dn))+1 \qquad (1)$$

ここで，

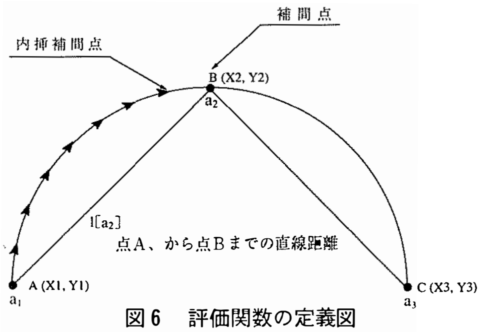


図６　評価関数の定義図

N	：内挿補間点数
l[a_2]	：点 a_1～点 a_2 の直線距離
[曲率]	：点 a_1, a_2, a_3 の２次差分商
ds	：制御曲線距離
dn	：制御直線距離
a	：曲率定数
b	：直線定数

ここで，本紀要では，dn＝0.5，ds＝0.25，a＝5,. b＝0.25とした。

ただし，以下に定める近傍内での曲率はゼロとする。

曲率ゼロ近傍：点 a_1 を中心とする半径 l[ds*3]の近傍

この評価式は，図７，８のように補間点間の内挿補間点の数を算出する。

この評価式を，各区間に適用し，描画する１つ先の内挿補間点数との平均値をその補間区間の補間点数とする。

この評価式により，本来は無限の内挿点を使用してしか表現できなかった形状を一定の評価式のもとで，限られた内挿点(一定の誤差範囲)をもちいて，高速で安定した描画が可能となる。

その具体的な適用例を図９に挙げる。

図９の特に曲率の高い所の葉の部分と対照的に曲率の低い花の部分に注目して，その内挿点数を比較した場合に内挿補間点数は，

a．花	平均46個
b．茎（直線部分）	17個
c．葉	平均46個
	（但し，最大値93個）

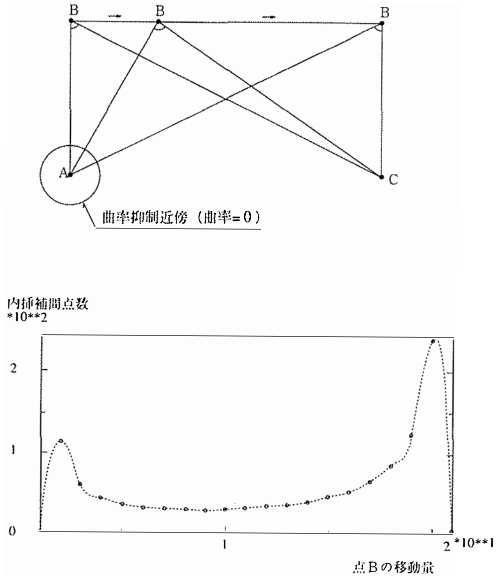


図７　評価式の特徴　その１

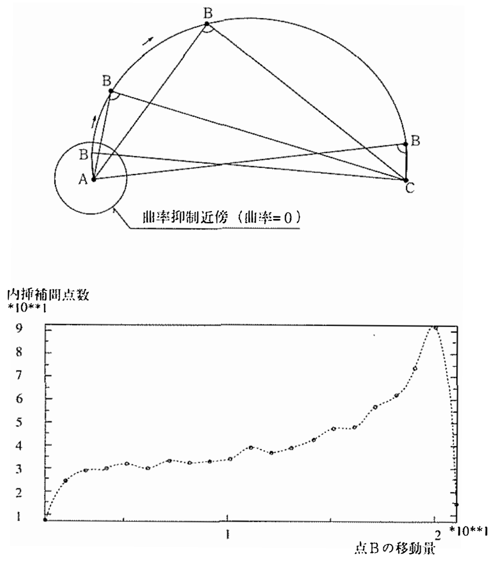
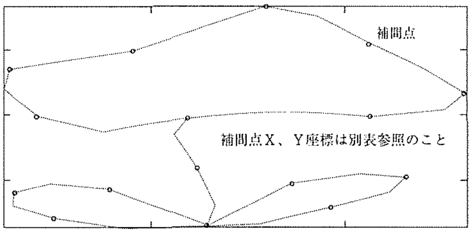


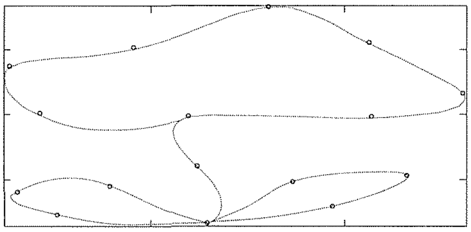
図８　評価式の特徴　その２

となった。

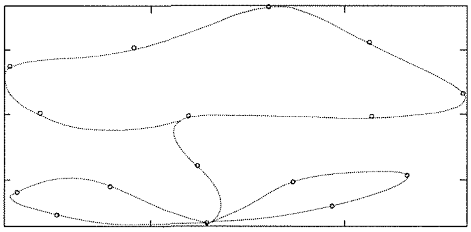
例として検討した花の図形では，曲率の応じた内挿点数が導出できていることがわかる。また，比較のために，補間点間の内挿点数を200個に固定して描画した図形も求めた。



（1）　補間時に内挿補間点が十分でない場合



（2）　近似曲線の形状により内挿補間点を増減させた場合
計算時間　　約３分



（3）　内挿補間点を一律200点とした場合
計算時間　　約18分

図９　花の図

表１　花の図形を構成する点の座標

座標点	x 座標	y 座標
1	6	9.6
2	2.2	9.8
3	1.5	13.6
4	4.6	14.9
5	8	18.2
6	10.6	15.3
7	13	11.3
8	10.6	9.6
9	6	9.6
10	6.2	5.9
11	6.5	1.3
12	4	4.2
13	1.6	3.9
14	2.6	1.9
15	6.5	1.3
16	8.6	4.5
17	11.5	5
18	9.6	2.6
19	6.5	1.3

ここで，内挿補間点200個の花の描画に必要となった時間は，18分であり，評価式を適用して，内挿補間点を増減させた場合の６倍の描画時間がかかった。ところが，結果として表示された形状を比較した場合，その明確な差は人間では認識出来ない誤差範囲内に含まれるものと思われる。

4. 今後の課題

今回，問題点として残る内容は，検討したパラメータ型スプライン補間多項式では補間点の始点と終点の曲率の連続を保証しないため円が描画できない点が挙げられる。

また，補間多項式で表現された自由曲線は，微分，積分も可能である。とくに，スプライン関数は，特異点等の解析上の問題を持っていないため，どのような図形も十分な近似ができれば一定の数値計算のみでその特徴を算出する事が出来る。

今後は，この特徴を利用して曲線の直線近似から表現された形状の種々の特徴抽出の検討も行う必要がある。

5. ま　と　め

デジタル処理による図形の表現の習得を目的として，パラメータ型スプライン補間多項式の実用化の可能性について検討を加え，さらに，その具現化をはかるために，高速で安定した描画のための評価式の提案し，定量的な検討を試みた。

ここで，内挿補間点に関する評価式が補間点

から生成した補間多項式を微分したものでないため，補間多項式の特徴に影響されない評価式となっているが，補間多項式自体の１次微分関数にもとづく評価式の検討もしなくてはならないだろう。

今後は，検討する次元を増やして三次元の検討を行う。また，二次元での閉曲線の取扱いの検討もすすめる。

参考文献，資料

1) 梶谷哲也，若林絵里子，楊　国林：近傍系を用いた柄あわせ，文化女子大研究紀要21，p. 387-392,（1990. 1）

2) “RB2 システム”：‘Eye Phone’ その他，VPL Reserch 社，（輸入）日商エレクトロニクス㈱

3) 秦野和朗，二宮市三：B-spline による補間スプラインの算法，情報処理，Vol. 19，No. 6，p. 538-545,（1978）

4) 秦野和朗，二宮市三：２変数補間スプラインの算方と誤差解析，情報処理，Vol. 19, No. 3, p. 196-203,（1978）

〔補　足　資　料〕

○　スプライン補間関数について

本紀要で検討の対象としたスプライン関数は，以下のように定義される。閉区間［a, b］で関数 $f(x)$ を近似する場合に，区間［a, b］を n 個に分割し，この小区間内でそれぞれ異なった多項式で $f(x)$ を近似する。いま，与えられた点を $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ とし，その関数値をそれぞれ

$$f_r = f(x_r) \quad (r=0, 1, 2, \cdots\cdots, n) \qquad (補1)$$

とする。

また，これらの分点により閉区間［a, b］を分割した小区間を

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (0 \leqq j \leqq n-1) \qquad (補2)$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n = b \qquad (補2')$$

とする。

このとき，分割された各小区間で $f(x)$ を近似する m 次多項式の全体は，“区間多項式”と呼ばれる。

さらに，区間［a, b］で２回連続微分可能な３次の区間多項式は“スプライン関数”とよばれ，これを $s(x)$ とあらわす。

このスプライン関数は分割された小区間［x_j, x_{j+1}］において以下に述べる条件で各係数が決定される３次多項式

$$s_j(x) = \boldsymbol{\Sigma}_{i=0,3}\, a_{ji} x^i \quad (0 \leqq j \leqq n-1) \qquad (補3)$$

で構成される。

ここで，条件は，以下の通りである。

$$s_j(x) = f_j \quad (0 \leqq j \leqq n-1) \qquad (補4)$$

$$s_{j-1}(x_j) = f_j \quad (1 \leqq j \leqq n) \qquad (補5)$$

$$s'_{j-1}(x_j) = s'_j(x_j) \quad (1 \leqq j \leqq n-1) \qquad (補6)$$

$$s''_{j-1}(x_j) = s''_j(x_j) \quad (1 \leqq j \leqq n-1) \qquad (補7)$$

但し，本紀要で作成したプログラムは，B-スプライン関数を基本とし，ドブァ・コックスの漸化式を使用した，桁落ちの少ないものを参考とした。

また，補間関数にパラメータ変数を導入し，（補２′）の条件（制約）のない“パラメータ型スプライン関数”として利用した[3)4)]。